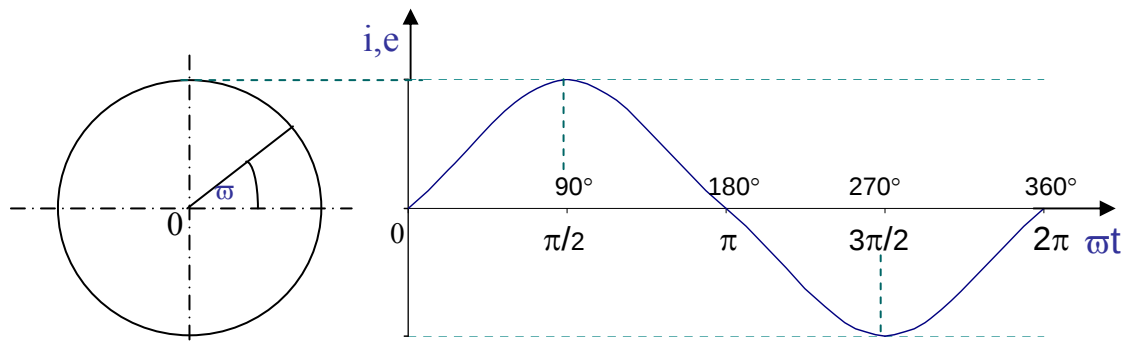


7. Наизменичен (променлив) напон и наизменична струја



$$e = E_m \sin \omega t$$

e [V] – моментална вредност на индуцирана ЕМС

E_m [V] – максимална индуцирана ЕМС

$$i = I_m \sin \omega t$$

i [A] – моментална вредност на наизменична струја

I_m [A] – максимална вредност на јачината на наизменичната струја (амплитуда)

$$\omega = 2\pi f$$

ω [rad] – кружна (аголна) фреквенција

f [Hz] – фреквенција

$$f = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{s} = s^{-1} \right] = [\text{Hz}]$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} [\text{A}]$$

I [A] – ефективна вредност на наизменичната струја

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} [\text{V}]$$

U [V] – ефективна вредност на наизменичниот напон

Електричните големина со фазна промена дадени се со изразите:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$\omega t + \varphi_1$ – фаза на напон или фазен агол на напонот

$\omega t + \varphi_2$ – фаза на струја или фазен агол на струјата

φ_1 и φ_2 – почетни фази (за $t=0$)

1. Моменталната вредност на наизменичната струја е дефинирана со равенката: $i = 30 \sin 314t$. Колкава е максималната и ефективната вредност на струјата и колкава е нејзината фреквенција?

решение:

$$i = I_m \sin \omega t$$

$$I_m = 30 \text{ A}$$

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,71 \cdot I_m = 0,71 \cdot 30 = 21,3 \text{ A}$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2 \cdot 3,14} = 50 \text{ Hz}$$

2. Да се пресметаат фреквенциите, периодите и ефективните вредности на струите: $i_1 = 10 \sin 314t$ и $i_2 = 10 \sin 628t$

решение:

фреквенциите на струите изнесуваат:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{314}{2 \cdot 3,14} = 50 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{628}{2 \cdot 3,14} = 100 \text{ Hz}$$

периодите на струите се:

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s}$$

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ s}$$

ефективните вредности на струите изнесуваат:

$$I_1 = I_2 = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{10}{1,41} = 7,07 \text{ A}$$

3. Изразот за моменталната вредност на наизменичната струја е $i = 120 \sin (100\pi t + 0,36)$ A. Да се определат:

а) максималната вредност, фреквенцијата и периодата на наизменичната струја.

б) моменталната вредност на струјата за почетно време 0 s, и за време од 8 ms.

в) времето за кое струјата има вредност 60 A.

г) времето за кое струјата ја постигнува својата максимална вредност.

решение:

$$i = I_m \sin(\omega t \pm \varphi)$$

$$i = 120 \sin(100\pi t + 0,36)$$

$$a) I_m = 120 \text{ A}$$

$$\omega = 2\pi f = 100\pi \Rightarrow 2f = 100 \Rightarrow f = \frac{100}{2} = 50 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} 0,02 \text{ s} = 20 \text{ ms}$$

$$б) \text{ за } t = 0 \text{ s}$$

$$i = 120 \sin(100\pi t + 0,36) = 120 \sin 0,36$$

$$\varphi^\circ = \varphi (\text{rad}) \cdot \frac{180}{\pi} = 0,36 \cdot \frac{180}{3,14} = 20,637^\circ$$

$$I = 120 \sin 20,637^\circ = 120 \cdot 0,35 = 42,29 \text{ A}$$

$$\text{за } t = 8 \text{ ms}$$

$$i = 120 \sin(100\pi \cdot 8 \cdot 10^{-3} + 0,36) = 120 \sin 2,872$$

$$2,872 \cdot \frac{180}{3,14} = 164,63^\circ$$

$$i = 120 \sin 164,63^\circ = 120 \cdot 0,265 = 31,86 \text{ A}$$

$$в) i = 60 \text{ A}; t = ?$$

$$60 = 120 \sin(100\pi t + 0,36) \Rightarrow \sin(314 t + 0,36) = \frac{60}{120} = 0,5$$

$$314 t + 0,36 = \arcsin 0,5 = 30^\circ$$

$$314 t + 0,36 = \pi/6 = 0,523 \Rightarrow t = 0,52 \text{ ms}$$

$$г) 120 = 120 \sin(100\pi t + 0,36)$$

$$\sin(314 t + 0,36) = 1$$

$$314 t + 0,36 = \arcsin 1 = 90^\circ = \pi/2 = 1,57 \text{ rad}$$

$$314 t + 0,36 = 1,57 \Rightarrow t = 3,85 \text{ ms}$$

4. Вредноста на наизменичниот напон дадена е тригонометриски со изразот

$u = 282,8 \sin 314t$. Да се определат:

а) ефективната вредност

б) фреквенцијата

в) моменталната вредност на напонот за време од 4 ms.

решение:

$$u = 282,8 \sin 314t$$

$$u = U_m \sin \omega t \Rightarrow U_m = 282,2 \text{ V}; \omega = 314 \text{ rad/s}$$

$$a) U = 0,707 U_m = 0,707 \cdot 282,8 = 200 \text{ V}$$

$$б) \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2 \cdot 3,14} = 50 \text{ Hz}$$

$$в) (314t) = 282,8 \sin (314 \cdot 4 \cdot 10^{-3}) = 282,8 \sin 1,256$$

$$\varphi^\circ = \varphi (\text{rad}) \cdot \frac{180}{\pi} = 1,256 \cdot \frac{180}{3,14} = 72^\circ$$

$$u = 282,8 \sin 72^\circ = 282,8 \cdot 0,951 = 268,9 \text{ V}$$

5. Да се нацрта фазорски дијаграм на струите дадени со равенките:

$$i_1 = 6 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) \text{ и}$$

$$i_2 = 8 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right)$$

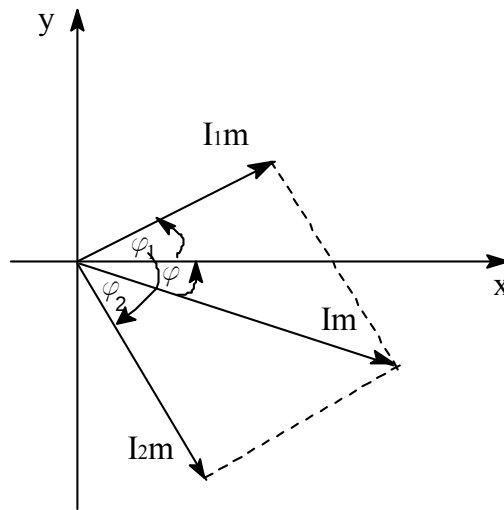
Да се определат почетните фази и фазната разлика на поединечните струи, како и максималната вредност и почетната фаза на резултантната струја.

решение:

$$i_1 = 6 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow \quad I_m = 6 \text{ A}; \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{6} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

$$i_2 = 8 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow \quad I_m = 8 \text{ A}; \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{3} = -\frac{180^\circ}{3} = -60^\circ$$

$$\text{фазната разлика е: } \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 30^\circ - (-60^\circ) = 90^\circ$$



максималната вредност на резултантната струја е:

$$I_m = \sqrt{I_1 m^2 + 2I_1 m I_2 m \cos(\varphi_1 \varphi_2) + I_2 m^2}$$

$$I_m = \sqrt{6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos 90^\circ + 8^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ A}$$

тангенсот на почетната фаза на резултантната струја е:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_1 m \sin \varphi_1 + I_2 m \sin \varphi_2}{I_1 m \cos \varphi_1 + I_2 m \cos \varphi_2} = \frac{6 \sin 30^\circ + 8 \sin(-60^\circ)}{6 \cos 30^\circ + 8 \cos(-60^\circ)} = -0,427$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(-0,427) = -23^\circ$$

6. Да се нацрта фазорски дијаграм на струите дадени со изразите:

$$i_1 = 20 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$i_2 = 20 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$i_3 = 5 \sin \omega t$$

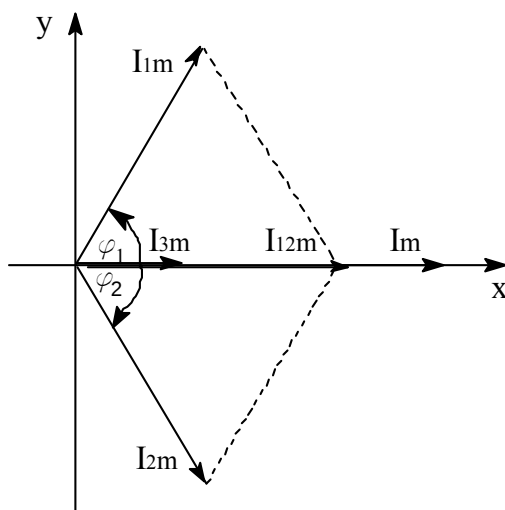
Да се напише изразот за моменталната вредност на резултантната струја и неговата точност да се провери тригонометриски.

решение:

$$i_1 = 20 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow I_{1m} = 20 \text{ A}; \quad \varphi_1 = +\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$i_2 = 20 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow I_{2m} = 20 \text{ A}; \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{3} = -\frac{180^\circ}{3} = -60^\circ$$

$$i_3 = 5 \sin \omega t \Rightarrow I_{3m} = 5 \text{ A}; \quad \varphi_3 = 0^\circ$$



$$I_{12m} = \sqrt{I_1 m^2 + 2I_1 m I_2 m \cos(\vec{\varphi}_1 \vec{\varphi}_2) + I_2 m^2}$$

$$I_{12m} = \sqrt{20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 20 \cos 120^\circ + 20^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ A}$$

$$I_m = I_{12m} + I_{3m} = 20 + 5 = 25 \text{ A}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{12} = \frac{I_1 m \sin \varphi_1 + I_2 m \sin \varphi_2}{I_1 m \cos \varphi_1 + I_2 m \cos \varphi_2} = \frac{20 \sin 60^\circ - 20 \sin 60^\circ}{20 \cos 60^\circ + 20 \cos 60^\circ} = 0$$

$$\varphi_{12} = \arctg 0 = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_{12} m \sin \varphi_{12} + I_3 m \sin \varphi_3}{I_{12} m \cos \varphi_{12} + I_3 m \cos \varphi_3} = \frac{20 \sin 0^\circ + 5 \sin 0^\circ}{20 \cos 0^\circ + 5 \cos 0^\circ} = 0$$

$$\varphi = 0$$

тригонометриска проверка:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = 20 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) + 20 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right) + 5 \sin \omega t$$

$$i = 20 \left[\sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right) \right] + 5 \sin \omega t =$$

$$= 20 \left[2 \sin \frac{\left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) + \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right)}{2} \cos \frac{\left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) - \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right)}{2} \right] + 5 \sin \omega t$$

$$= 20 \left[2 \sin \frac{2\omega t}{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{2} \right] + 5 \sin \omega t = 20 \left(2 \sin \omega t \cdot \cos \frac{\pi}{3} \right) + 5 \sin \omega t$$

$$= 40 \sin \omega t \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 5 \sin \omega t = 40 \cdot 0.5 \sin \omega t \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 5 \sin \omega t = 20 \sin \omega t + 5 \sin \omega t$$

$$i = 25 \sin \omega t$$

7. Да се нацрта фазорски дијаграм на напоните со изразите:

$$u_1 = 50 \sin \omega t$$

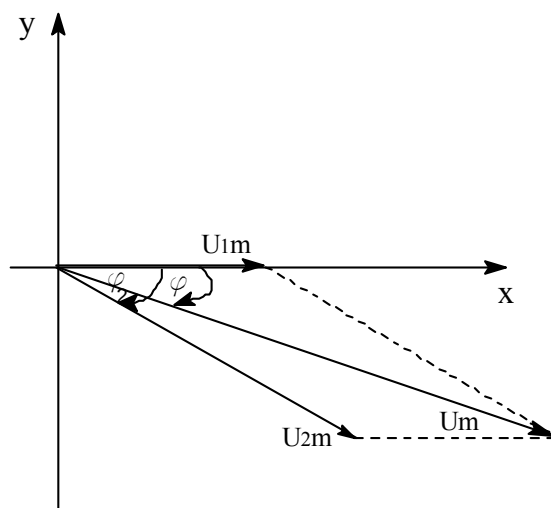
$$u_2 = 100 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{6} \right)$$

Да се напише изразот за моменталната вредност на резултантниот напон, и да се нацртаат синусоидните промени на поединечните напони и на резултантниот напон.

решение:

$$u_1 = 50 \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad U_{1m} = 50V; \quad \varphi_1 = 0^\circ$$

$$u_2 = 100 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow U_{2m} = 100V; \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{6} = -\frac{180^\circ}{6} = -30^\circ$$



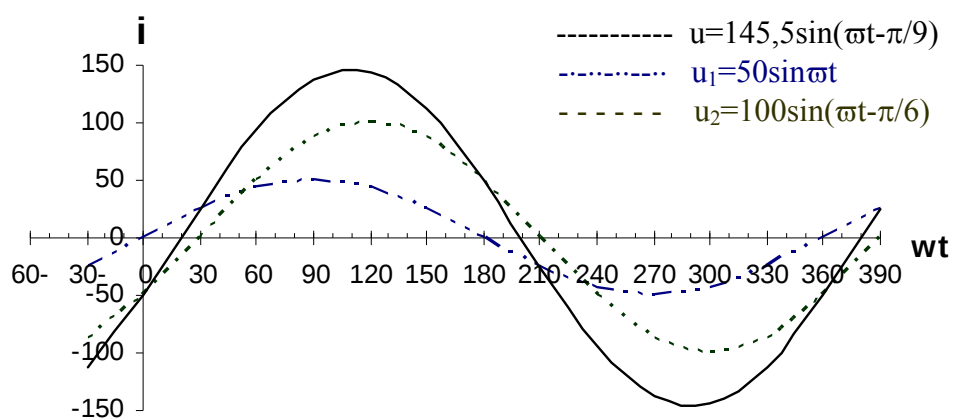
$$U_m = \sqrt{U_1^2 + 2U_1U_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + U_2^2}$$

$$U_m = \sqrt{50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 100 \cos 30^\circ + 100^2} = 145,5 \text{ V}$$

$$\tan \varphi = \frac{U_1 \sin \varphi_1 + U_2 \sin \varphi_2}{U_1 \cos \varphi_1 + U_2 \cos \varphi_2} = \frac{50 \sin 0^\circ - 100 \sin 30^\circ}{50 \cos 0^\circ + 100 \cos 30^\circ} = -0,366$$

$$\varphi = \arctg(-0,366) = -20^\circ = -0,35 \text{ rad} = -\pi/9$$

$$u = 145,5 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{9} \right)$$



8. Да се нацртаат синусоидните промени на две наизменични струи кои имаат еднакви максимални вредности од 10 А, почетни фази 0° и фреквенции 50 Hz и 100 Hz, соодветно. Да се напишат изразите за моменталните вредности на двете струи.

решение:

$$i = I_m \sin(\omega t \pm \varphi)$$

$$i_1 = 10 \sin 314t$$

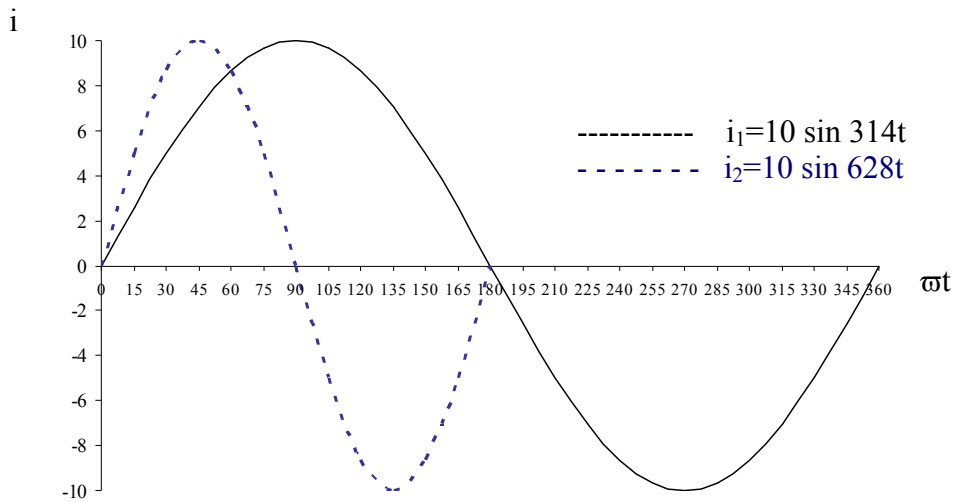
$$f_1 = 50 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f_1 = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ rad/s}$$

$$i_2 = 10 \sin 628t$$

$$f_2 = 100 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f_2 = 2\pi \cdot 100 = 628 \text{ rad/s}$$



9. Кондензатор со капацитивност 500 μF вклучен е во електрично коло на наизменична струја со фреквенција 100 Hz. Колкава е капацитивната отпорност на кондензаторот?

решение:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = 3,18 \Omega$$

10. Во електрично коло на наизменична струја со омска отпорност $2\text{ k}\Omega$, индуктивност 1 H и капацитативност $2\mu\text{F}$, поврзани во серија, при напон 220 V , фреквенција 50 Hz и фактор на моќност $0,8$. Да се определи: привидната, активната и реактивната моќност на колото.

решение:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 1 = 314\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 1592,5\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{2000^2 + (314 - 1592,5)^2} = 4200\ \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{4200} = 0,052$$

$$P_p = U \cdot I = 220 \cdot 0,052 = 11,44\ \text{VA}$$

$$P_a = P_p \cdot \cos\varphi = 11,44 \cdot 0,8 = 9,15\ \text{W}$$

$$P_r = P_p \cdot \sin\varphi = P_p \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = 11,44 \sqrt{1 - 0,8^2} = 6,86\ \text{Var}$$